EXERCICE N°1 — 5 points — 35 ' — PRINCIPALE 2018

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(2i\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z - 4\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.

1°) a) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$ et que $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = i\sqrt{2}\;e^{i\frac{5\pi}{12}}$

b) Vérifier que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une solution de l'équation (E).

c) Trouver alors l'autre solution de z_2 de l'équation (E).

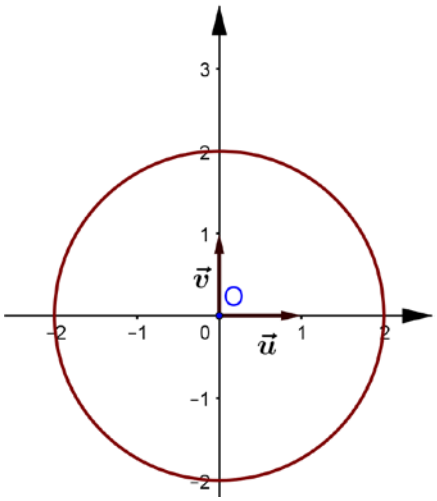
d) Écrire chacun des nombres complexes z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

a) Vérifier que $z_B = i\,z_A$.

b) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle.

c) Construire, dans la figure ci-contre, les points A et B.



3°) Soit C le point du plan d'affixe $z_C = \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

a) Montrer que $OACB$ est un carré.

b) Placer le point C.

c) Déterminer la forme exponentielle de z_C.

EXERCICE N°2 — 5,5 points — 40 ' — CONTRÔLE 2018

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) : $z^2 + (2+i)z + i = 0$.

2°) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 + (1+i)z^2 - 2\,z - i = 0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + (1+i)\,z^2 - 2\,z - i = (z-1)\left(z^2 + a\,z + b\right).$$

c) En déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E).

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

3°) Dans Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = 1$.

a) Mettre chacun des nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Montrer que les points A et B appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Construire les points A , B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

4°) Soient les points E et F du plan d'affixes respectives $z_E = z_A - 1$ et $z_F = z_B - 1$.

a) Montrer que $OEAC$ et $OFBC$ sont des parallélogrammes.

b) Construire alors E et F.

c) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ et $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{i\frac{7\pi}{6}} - 1$.

d) Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1).

EXERCICE N°3 — 5 points — 30 ' — PRINCIPALE 2019

1°) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2 - \left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)z + 2\sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $(1-i)$ est une solution de l'équation (E).

b) Déduire l'autre solution de l'équation (E).

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) Donner la forme exponentielle de chacun des nombre complexes z_A et $\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

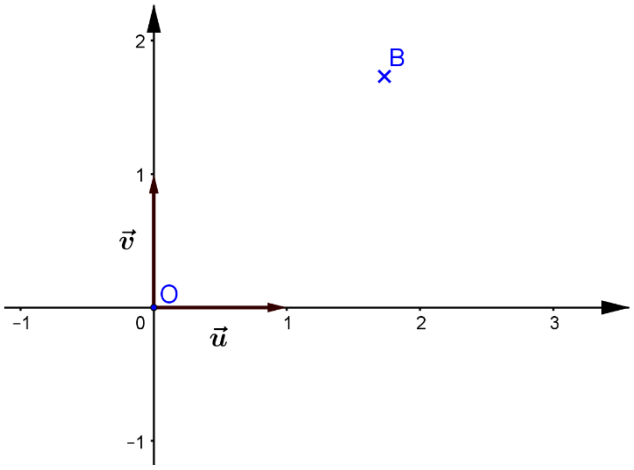
b) Vérifier que $z_B = \left(i\sqrt{3}\right)z_A$.

c) Déduire que $z_A + z_B = z_C$.

d) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un rectangle.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

e) Dans la figure ci-contre on a placé le point B. Placer le point A et construire le point C.



3°) Soit I le centre du rectangle $OACB$ et G le centre de gravité du triangle OAI.

a) Montrer que $z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A)$.

b) Montrer que $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3} + i\right) z_A$.

c) Déduire la forme exponentielle de z_G.

EXERCICE N°3 — 5 points — 30 ' — CONTRÔLE 2019

1°) a) Vérifier que $\left(3 + i\sqrt{3}\right)^2 = 6 + 6i\sqrt{3}$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + \left(5 - i\sqrt{3}\right)z + 4 - 4i\sqrt{3} = 0$.

2°) Dans le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et $\mathscr{C}$ d'affixes respectives $z_A = -4$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -i\, z_B$.

a) Montrer que le triangle OBC est isocèle et que $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Mettre z_B sous forme exponentielle et déduire que le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

c) Placer le point A et construire les points B et C.

3°) Soit D le point d'affixe $z_D = (1 - i)\, z_B$.

a) Montrer que le quadrilatère $OCDB$ est un carré.

b) Montrer que $aff\left(AB\right) = \sqrt{3}\, z_C$.

c) Déduire que les points A, B et D sont alignés.

d) Calculer l'aire du quadrilatère $OADC$.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com